

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE
4. veljače 2010.

8. razred-osnovna škola

Zadaci za 4 boda:

1. Odredi još dva broja koji nastavljaju započeti niz brojeva 3, 6, 24, 192, ...
Postupak obrazloži.
2. Koliko znamenaka u dekadskom zapisu ima broj $10\,000^{9999}$?
3. Duljine dijagonala romba iznose $\sqrt{2010} + \sqrt{2002}$ cm i $\sqrt{2010} - \sqrt{2002}$ cm. Izračunaj površinu tog romba.
4. Skrati razlomak: $\frac{4a^2 - 4ab}{a^3 - ab^2}$.
5. Za koji realan broj a izraz $a^2 - 4a + 2010$ ima najmanju vrijednost? Kolika je najmanja vrijednost?

Zadaci za 10 bodova:

6. Duljine kateta a i b pravokutnog trokuta ABC odnose se kao 8 : 15, a njegov opseg iznosi 100 cm. Izračunaj duljine svih stranica tog trokuta.
7. Kvadrat nekog cijelog broja za 49 je veći od razlike trostrukog kvadrata njegova prethodnika i dvostrukog kvadrata njegova sljedbenika. Koji je to broj? Koji je broj njegov sljedbenik?
8. Duljine visina jednakokravnog trokuta ABC , s osnovicom \overline{AB} , su 20 cm i 24 cm. Koliki je opseg trokuta ABC ako je duljina kraka manja od duljine osnovice?

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. veljače 2010.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Količnici uzastopnih članova su 2,4,8. 1 BOD
Kako je $4:2=2$ i $8:4=2$, onda sljedeći količnik treba biti $8 \cdot 2 = 16$, a zatim $16 \cdot 2 = 32$.

2 BODA

Zato u nizu slijedi broj $192 \cdot 16 = 3072$ odnosno $3072 \cdot 32 = 98304$. 1 BOD

..... UKUPNO 4 BODA

2. Potrebno je uočiti da je $10\,000^{9999} = (10^4)^{9999}$. 2 BODA
Iz toga slijedi jednakost $(10^4)^{9999} = 10^{39996}$. 1 BOD

Dakle, iza znamenke 1 biti će 39 996 nula, pa će broj imati 39 997 znamenaka. 1 BOD

..... UKUPNO 4 BODA

3. Površina romba je jednaka polovini umnoška duljina njegovih dijagonala.

$$p = \frac{(\sqrt{2010} + \sqrt{2002}) \cdot (\sqrt{2010} - \sqrt{2002})}{2} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$p = \frac{(\sqrt{2010})^2 - (\sqrt{2002})^2}{2} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$p = \frac{2010 - 2002}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Površina romba iznosi 4 cm^2 . 2 BODA

..... UKUPNO 4 BODA

4. $\frac{4a^2 - 4ab}{a^3 - ab^2} = \frac{4a \cdot (a - b)}{a \cdot (a^2 - b^2)} =$ 2 BODA

$$= \frac{4 \cdot a \cdot (a - b)}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)} = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{4}{a + b} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 4 BODA

5. Vrijedi $a^2 - 4a + 2010 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 2010 = (a - 2)^2 + 2006$. 2 BODA

Za $a = 2$ najmanja vrijednost je 2006. 2 BODA

..... UKUPNO 4 BODA

6. Iz $a : b = 8 : 15$ slijedi da je $a = 8x$ i $b = 15x$, $x \in \mathbb{Q}$. 2 BODA

Primjenom Pitagorina poučka dobiva se $c^2 = (8x)^2 + (15x)^2$, tj. $c^2 = 289x^2$.

Duljina hipotenuze je $c = 17x$. 3 BODA

Opseg trokuta je 100 cm pa je $8x + 15x + 17x = 100$.

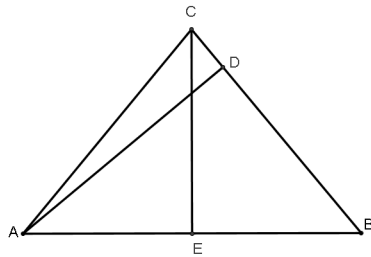
Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo $x = 2.5$. 2 BODA

Duljine stranica trokuta su $a = 20$ cm, $b = 37.5$ cm i $c = 42.5$ cm. 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Broju n prethodnik je broj $n - 1$, a sljedbenik $n + 1$. 1 BOD
 Iz uvjeta zadatka slijedi jednačba:
 $n^2 - 49 = 3(n - 1)^2 - 2(n + 1)^2$ 2 BODA
 $n^2 - 49 = 3(n^2 - 2n + 1) - 2(n^2 + 2n + 1)$ 2 BODA
 $n^2 - 49 = 3n^2 - 6n + 3 - 2n^2 - 4n - 2$ 1 BOD
 $10n = 50$ 2 BODA
 $n = 5$ 1 BOD
 Traženi broj je 5, a njegov sljedbenik 6. 1 BOD
 UKUPNO 10 BODOVA

8.



- Neka su \overline{AD} visina na krak \overline{BC} i \overline{CE} visina na osnovicu \overline{AB} . 1 BOD
 Kako je $|BC| < |AB|$, onda je $|AD| > |CE|$. To znači da je $|AD| = 24$ cm, a $|CE| = 20$ cm. 1 BOD
 Kako je $P = \frac{|AB| \cdot |CE|}{2} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2}$, onda vrijedi $20|AB| = 24|BC|$
 odnosno $|AB| = \frac{6}{5}|BC|$. 2 BODA
 Primijenimo li Pitagorin poučak na $\triangle BCE$, slijedi $20^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = |BC|^2$ odnosno nakon
 sređivanja $|BC| = 25$ cm i $|AB| = 30$ cm. 4 BODA
 Na kraju, $O = |AB| + 2 \cdot |BC| = 30 + 2 \cdot 25 = 80$ cm. 2 BODA
 UKUPNO 10 BODOVA